

大規模閉鎖型 BCMP 待ち行列ネットワークの複数窓口への対応

小宮山 佑樹^{†1}, 大場 春佳¹, 水野 信也¹

キーワード: BCMP 待ち行列ネットワーク, 平均値解析法, 並列計算, MPI

1. はじめに

1975年に発表されたBCMP待ち行列ネットワーク[1]は、開放型と閉鎖型の両方へ対応、多クラスへの対応、4種類のサービス方式に対応と待ち行列モデルの中でも柔軟なモデルであり、実際の社会モデルへの適用が期待できる。しかしながら、閉鎖型では正規化定数の算出に膨大な計算量を要し、大規模な閉鎖型モデルの活用が困難であった[2]。計算機環境の性能が向上した現在、並列計算を用いて大規模閉鎖型モデルに対する計算手法が考案されている[3]。本研究では、閉鎖型BCMP待ち行列ネットワークモデル(以下、閉鎖型BCMP)に対し、複数窓口に対応できるように、従来から用いられている平均値解析法に並列計算を取り入れ、大規模閉鎖型モデルに対して計算を実施する。

2. 複数窓口に対応した閉鎖型BCMPの性能評価指標の算出方法

本研究で扱う閉鎖型BCMP待ち行列ネットワークの基本モデルを以下に定義する[4]。

1. 網内でサービスされる客のクラスは C 種類であり、客はいずれかのクラスに必ず属し、途中でのクラス変更はないものとする。
2. 網内には N 個の拠点が存在する。
3. 網内の客の総数が K のとき、拠点 n ($1 \leq n \leq N$)のクラス c ($1 \leq c \leq C$)の客数を $k_{nc} \geq 0$ とし、

$$K = \sum_{c=1}^C \sum_{n=1}^N k_{nc}$$

を満たす。また $k_n = \sum_{c=1}^C k_{nc}$, $k_c = \sum_{n=1}^N k_{nc}$ である。

4. 網外からの客の到着は閉鎖型のためないものとする。
5. 各拠点は到着順サービス(FCFS)を行う一つ以上のサーバで構成される。
6. 拠点 n において、サービス時間は客のクラスによらず、サービス率 μ_n ($1 \leq n \leq N$)の指数分布に従う。
7. 拠点 n に網内から到着するクラス c の客の全到着率は α_{nc} とする。
8. 拠点 i でサービスを受けたクラス v の客は、次のマルコフ連鎖 \mathbf{R} に従って拠点 j にクラス w で移動する。 $\mathbf{R} = (r_{iv,jw})$, \mathbf{R} は(1)を満たす。

$$1 \leq i \leq N, 1 \leq v \leq C, r_{iv,jw} \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{w=1}^C r_{iv,jw} = 1 \quad (1)$$

今回客のクラス推移は考えないため、 $r_{iv,jw} = 0$ ($v \neq w$)とする。また上記の α_{iv} は、今回の閉鎖型ネットワークに対するトラフィック方程式(2)を満たすものである。

$$\alpha_{iv} = \sum_{c=1}^C \left(\sum_{n=1}^N \alpha_{nc} r_{nc,iv} \right) \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq v \leq C) \quad (2)$$

これより、閉鎖型BCMPモデルにおける定常分布は以下の式で与えられる。ここで、ノード n の状態は、 $\mathbf{s}_n = (s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{nk_n})$ で表現される。ここで s_{ij} はノード i において先着順で j 番目に並んでいる客のクラスを表すものであり、網内の状態を、 $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_N)$ 、客クラス別人数を、 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_C)$ とおく。複数窓口対応の閉鎖型BCMPの性能評価指標は、以下で与えられる。

平均系内時間 $T_{n,c}(\mathbf{k})$ ($1 \leq n \leq N, 1 \leq c \leq C$):

$$T_{n,c}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mu_{n,c} \cdot m_n} \left(1 + \sum_{v=1}^C L_{n,v}(\mathbf{k} - \mathbf{1}_v) + \sum_{j=0}^{m_n-2} (m_n - j - 1) \pi_n(j | \mathbf{k} - \mathbf{1}_v) \right) \quad (3)$$

$$\text{スループット: } \lambda_c(\mathbf{k}) = \frac{k_c}{\sum_{i=1}^N \alpha_{ic} T_{i,c}(\mathbf{k})} \quad (4)$$

$$\text{平均系内人数: } L_{n,c}(\mathbf{k}) = \lambda_c(\mathbf{k}) T_{n,c}(\mathbf{k}) \alpha_{nc} \quad (5)$$

3. 数値計算例

大規模計算による計算時間について示す。 $N = 33, C = 2, K = 500$, 並列数76のとき、窓口数 $m = 1, 2, 3$ における計算時間は図1のように変化する。

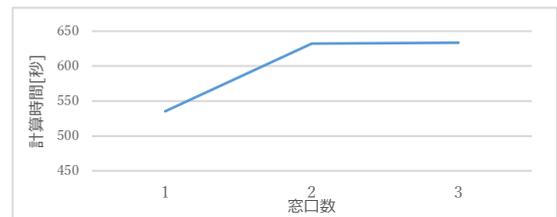


図1 窓口数 $m = 1, 2, 3$ における計算時間

^{†1} 静岡理工科大学

次に、 π の再帰計算におけるメモ化について計算時間の比較結果を示す。なお、ここでは大規模計算での時間の計測が困難であるため、小規模計算での比較を行う。 $N = 5, C = 2, K = 20$, 並列数6のとき、窓口数を全て1の状態から徐々に増加させると計算時間は図2のように変化する。



図2 窓口数の違いによる計算時間の変化

4. さいごに

本研究は、大規模閉鎖型 BCMP に対し、複数窓口への対応を行い、実際に数値計算を実施して解が得られるまでの過程を確認した。本研究をベースとして、閉鎖型 BCMP の日社会モデル適用を進めていく。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP21K11774 の助成を受けたものです。本研究成果は、大阪大学サイバーメディアセンターの大規模計算機システムを利用して得られたものです。

参考文献

- [1] Baskett F, Chandy KM, Muntz RR, Palacios FG (1975) Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. JACM 22:248–260.
- [2] Papadimitriou C, Tsitsiklis J (1999). The complexity of optimal queueing network. Math Oper Res 24:293–305.
- [3] Shinya Mizuno. Limitations of Calculating Theoretical Solutions for Closed BCMP Queueing Networks and Verification of Alternative Theoretical Values by Parallel Simulation, 13 July 2022, PREPRINT (Version 1) available at Research Square [<https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1826465/v1>]
- [4] Bolch G, Greiner S, De Meer H, Trivedi KS (2006) Queueing networks and Markov chains: modeling and performance evaluation with computer science applications. John Wiley & Sons.